Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
Khoa Khoa học ứng dụng
Bộ môn Toán

ĐÁP ÁN MÔN ĐẠI SỐ
Ngày thi: 26/12/2016

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
C. 1	1	$A \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -11\\ 0 & -1 & 1 & 6\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 10\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = U$.	**0,5**
		$L = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ -4 & -3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 10 & 1\end{bmatrix}$ và $A = LU = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ -4 & -3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 10 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.	**0,5**
	2	Theo phân tích ở trên, các cột 1, cột 2 và cột 4 là cột cơ sở của A nên một cơ sở của $\mathbf{Col}\,A$ là $\left\{\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -4\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\ 0\\ -3\\ 4\end{bmatrix}\right\}$ và $\dim \mathrm{Col}\, A = 3$.	**0,5**
	2	Ta có $\mathrm{Nul}\, A = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}$. Theo phân tích ở trên, $\begin{bmatrix}A & \mathbf{0}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}U & \mathbf{0}\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}U' & \mathbf{0}\end{bmatrix}$	**0.5**
		$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow U'\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vậy $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x_3\\ x_3\\ x_3\\ 0\end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}$, do đó một cơ sở của $\mathrm{Nul}\, A$ là $\left\{\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right\}$ và $\dim \mathrm{Nul}\, A = 1$.	
C. 2	1	A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 25m + 24 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1\\ m \neq 24\end{cases}$	**1,0**
	2	Lấy định thức hai vế ta có $\det(X)\det(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \det(B^T) = \frac{1}{8}\det(B) = \frac{3}{4}$. (Chú ý rằng A và B là các ma trận vuông cấp 3). Với $m \neq 1, m \neq 24$ ta có $\det(X) = \frac{3}{4}\left(\det(A)\right)^{-1} = \frac{3}{4\left(x^2 - 25x + 24\right)}$. (Hoặc cách khác : Do $\det(B) = 6 \neq 0$ nên phương trình chỉ có nghiệm khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$. Khi đó từ $XA = \frac{1}{2}B^T \Leftrightarrow X = \frac{1}{2}B^T A^{-1}$. Từ đó tính được	**1,0**

		$\det(X)$.)	
C. 3	**1**	$$W=\left\{\left(2a-b,a,b,-2a+2b\right)\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$$ Một hệ sinh của *W* là $S=\left\{\mathbf{u}_1=(2,1,0,-2),\mathbf{u}_2=(-1,0,1,2)\right\}$. Dễ thấy *S* độc lập tuyến tính và $W=\operatorname{Span}S$ nên *S* là cơ sở của *W*. Đặt $\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1=(2,1,0,-2)$, $\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_2-\frac{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1=(-1,0,1,2)-\frac{-6}{9}(2,1,0,-2)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{2}{3}\right)$. Vậy họ $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ là một cơ sở trực giao của *W* (hoặc ta có thể chọn lại $\mathbf{v}_2$ để được cơ sở trực giao là $\left\{\mathbf{v}_1=(2,1,0,-2),\mathbf{v}_2=(1,2,3,2)\right\}$).	**1,0**
	2	Theo 1, chọn cơ sở trực giao của *W* là $\left\{\mathbf{v}_1=(2,1,0,-2),\mathbf{v}_2=(1,2,3,2)\right\}$. Hình chiếu trực giao của $\mathbf{v}$ lên W là $\operatorname{proj}_W\mathbf{v}=\frac{\mathbf{v}.\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1+\frac{\mathbf{v}.\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2=\frac{-7}{9}(2,1,0,-2)+\frac{13}{18}(1,2,3,2)$ $=\frac{1}{18}(-15,12,39,54)=\frac{1}{6}(-5,4,13,18)$. Khi đó $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\operatorname{proj}_W\mathbf{v}$, với $\operatorname{proj}_W\mathbf{v}\in W$ và $\mathbf{u}=\mathbf{v}-\operatorname{proj}_W\mathbf{v}=(1,-1,2,4)-\frac{1}{6}(-5,4,13,18)=\frac{1}{6}(11,-10,-1,6)$ trực giao với *W*.	**1,0**
C. 4		Ma trận của dạng toàn phương là $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&0&2\\0&2&-1\end{bmatrix}$. Đa thức đặc trưng của A là $\det(A-\lambda I)=-\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$. Do đó các trị riêng của *A* là -3, 0, 3.	**0,5**
		Các vectơ riêng cơ sở của A : $\lambda_1=-3:\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}$, $\lambda_1=0:\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$, $\lambda_2=3:\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$.	**0,5**
		$\mathbf{x}_1=\frac{1}{\lVert\mathbf{u}_1\rVert}\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}-1/3\\-2/3\\2/3\end{bmatrix},\mathbf{x}_2=\frac{1}{\lVert\mathbf{u}_2\rVert}\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix},\mathbf{x}_3=\frac{1}{\lVert\mathbf{u}_3\rVert}\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}-2/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix}$.	**0,5**
		Đặt $P=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1&\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_3\end{bmatrix}, D=\operatorname{diag}(-3,0,3)=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$. Sử dụng phép đổi biến trực giao $\mathbf{x}=P\mathbf{y},\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1&y_2&y_3\end{bmatrix}^T$, khi đó dạng toàn phương f có dạng chính tắc $Q(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=\mathbf{y}^TD\mathbf{y}=-3y_1+3y_3$.	**0,5**

<table>
<tr><td rowspan="3">C. 5</td><td>1</td><td>Trong hệ thống mật mã Affine với khóa $K=\left(17,6\right)$ ta có :
$\mathbf{S}\to 18\mapsto 17\otimes 18\oplus 6=0\to \mathbf{A}$,
$\mathbf{T}\to 19\mapsto 17\otimes 19\oplus 6=17\to \mathbf{R}$,
$\mathbf{U}\to 20\mapsto 17\otimes 20\oplus 6=8\to \mathbf{I}$,
$\mathbf{D}\to \ 3\mapsto 17\otimes \ 3\oplus 6=5\to \mathbf{F}$,
$\mathbf{Y}\to 24\mapsto 17\otimes 24\oplus 6=24\to \mathbf{Y}$.
Vậy chữ STUDY được mã hóa thành chữ ARIFY.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Trong mật mã Hill, với khóa $K=\begin{bmatrix}3 & 17\\ 7 & 8\end{bmatrix}$:
Ta có $\det\left(K\right)=9\left(\bmod 26\right)$, do đó K khả nghịch trong $\mathbb{Z}_{26}$ và
$$K^{-1}=9^{-1}\begin{bmatrix}8 & -17\\ -7 & 3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}8 & 9\\ 19 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 1\\ 5 & 9\end{bmatrix}.$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Giải mã chữ SPOKML:
$\mathbf{SP}\to \begin{bmatrix}18\\ 15\end{bmatrix}\mapsto K^{-1}\begin{bmatrix}18\\ 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 1\\ 5 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}18\\ 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 17\end{bmatrix}\to \mathbf{FR}$,
$\mathbf{OK}\to \begin{bmatrix}14\\ 10\end{bmatrix}\mapsto K^{-1}\begin{bmatrix}14\\ 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 1\\ 5 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14\\ 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 4\end{bmatrix}\to \mathbf{IE}$,
$\mathbf{ML}\to \begin{bmatrix}12\\ 11\end{bmatrix}\mapsto K^{-1}\begin{bmatrix}12\\ 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 1\\ 5 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\ 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\ 3\end{bmatrix}\to \mathbf{ND}$.
Vậy chữ SPOKML được giải mã thành chữ FRIEND.</td><td>0,5</td></tr>
</table>